

Leçon 162 - Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Extrait du rapport de jury

Dans cette leçon, les techniques liées au simple pivot de Gauss constituent l'essentiel des attendus. Il est impératif de faire le lien avec la notion de système échelonné (dont on donnera une définition précise et correcte) et de situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire, sans oublier la dualité. Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt algorithmique des méthodes présentées doit être expliqué, éventuellement en l'illustrant par des exemples simples (où l'on attend parfois une résolution explicite).

Parmi les conséquences théoriques, les candidates et candidats peuvent notamment donner des systèmes de générateurs de $GL_n(\mathbb{K})$ et $GL_n(\mathbb{K})$. Il est aussi pertinent de présenter les relations de dépendance linéaire sur les colonnes d'une matrice échelonnée qui permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donnée par $(P, A) \mapsto PA$.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent exploiter les propriétés des systèmes d'équations linéaires pour définir la dimension des espaces vectoriels et obtenir une description de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels donnés par des systèmes générateurs, ou d'une somme de deux sous-espaces vectoriels donnés par des équations. De même, des discussions sur la résolution de systèmes sur \mathbb{Z} et la forme normale de Hermite peuvent trouver leur place dans cette leçon. Enfin, il est possible de présenter les décompositions LU et de Cholesky, en évaluant le coût de ces méthodes ou encore d'étudier la résolution de l'équation normale associée aux problèmes des moindres carrés et la détermination de la solution de norme minimale par la méthode de décomposition en valeurs singulières.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 162 intitulée : "Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques". La résolution des systèmes linéaires et au coeur de l'algèbre linéaire, celle-ci pouvant s'exprimer et se traiter uniquement en ces termes. Les problèmes physiques qui motivaient les premiers systèmes linéaires ont entièrement écloré de sorte que cette étude est au coeur de l'utilisation moderne des sciences, tous les modèles se discrétisant pour revenir à un traitement de systèmes linéaires : d'où l'importance de bien les comprendre en profondeur et de savoir les interpréter.

Dans une première partie on s'intéresse aux généralités sur les systèmes linéaires en commençant par quelques définitions qui sont nécessaires à la compréhension des systèmes linéaires (systèmes homogène, solution d'un système, système compatible, rang d'un système, etc.). On donne ensuite plusieurs interprétations d'un système d'équations linéaires avec tout d'abord le point de vue matriciel, puis vectoriel et enfin d'autres interprétations. Ces différents points de vue ont l'avantage de faire ressortir des propriétés des systèmes linéaires qui ne paraissaient pas évidentes jusqu'alors. Dans un troisième point on s'intéresse à la résolution d'un système linéaire en commençant par le cas d'un système de Cramer : on introduit la définition et on donne les formules de Cramer ainsi qu'un exemple. Les formules de Cramer ont un réel intérêt mathématique car elles permettent d'exprimer directement les solutions mais en pratique elles coûtent cher à utiliser... On passe ensuite au cas quelconque avec les notions d'équations et d'inconnues principales qui débouchent sur le théorème de Rouché-Fontené. On termine cette première partie avec un dernier point sur la structure de l'ensemble des solutions : dans le cas homogène, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel et dans le cas général on obtient un espace affine.

Dans une deuxième partie on va s'intéresser plus particulièrement au pivot de Gauss. On commence par définir la notion d'opérations élémentaires ainsi que quelques résultats sur le rang et l'image puis l'on introduit les matrices de transvection, de dilatation et de permutation qui permettent de traduire les opérations élémentaires en termes de produit matriciel. Dans un deuxième point on rentre dans le coeur du sujet en introduisant l'action par translation à gauche et à droite et on peut alors ré-exprimer les résultats précédents sous forme d'orbites et on cherche alors un représentant de l'orbite de la "meilleure forme possible" : c'est la philosophie de la méthode du pivot de Gauss. On s'inspire de cette méthode pour trouver des générateurs de $SL_n(\mathbb{K})$ et $GL_n(\mathbb{K})$ et donner une application à la connexité. Enfin dans un dernier point on s'intéresse aux décompositions de matrices comme la décomposition LU et de Cholesky car elles ont l'avantage d'avoir un coût plus faible informatiquement lorsque l'on veut résoudre des systèmes ou calculer des déterminants par exemple.

Finalement, on termine cette leçon par des méthodes itératives. On commence par donner le principe des méthodes itératives : c'est à dire approximer les solutions lorsque cela coûte trop cher de les calculer de manière exacte informatiquement (par exemple lorsque les systèmes sont trop grands). Puis on parle ensuite de la convergence d'une

méthode itérative en énonçant une condition nécessaire et suffisante. Enfin, on donne des exemples connus de méthodes itératives (méthode de Jacobi, de Gauss-Seidel et les méthodes de relaxation).

Plan général

I - Généralités sur les systèmes linéaires

- 1 - Premières définitions
- 2 - Divers interprétations
- 3 - Résolution d'un système linéaire
- 4 - Structure de l'espace des solutions

II - Opérations élémentaires et pivot de Gauss

- 1 - Opérations élémentaires
- 2 - Pivot de Gauss
- 3 - Décompositions LU et de Cholesky

III - Méthodes itératives

- 1 - Principe
- 2 - Convergence d'une méthode itérative
- 3 - Exemples de méthodes itératives

IV - Annexe

- 1 - Codage des opérations élémentaires
- 2 - Implémentation de l'algorithme du pivot de Gauss
- 3 - Exemple d'utilisation de l'algorithme du pivot de Gauss

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère \mathbb{K} un corps infini de caractéristique nulle, n et p deux entiers naturels non nuls et le système linéaire :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,j}x_j + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,j}x_j + \dots + a_{i,p}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,j}x_j + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où les $a_{i,j}$ et b_i sont des éléments de \mathbb{K} ((S) est donc un système linéaire à n inconnues et p équations).

I Généralités sur les systèmes linéaires

I.1 Premières définitions

Définition 1 : Matrice d'un système [Deschamps, p.1201] :

On appelle **matrice du système** (S) la matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [1;n] \times [1;p]}$.

Définition 2 : Second membre [Deschamps, p.1201] :

On appelle **second membre de** (S) le n -uplet (b_1, \dots, b_n) .

Définition 3 : Système homogène [Deschamps, p.1201 + 1202] :

On dit que (S) est un **système homogène** (ou que (S) est sans second membre) lorsque $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$. Le système (S_0) obtenu en remplaçant tous les b_i par 0 est alors appelé **système homogène associé à** (S) .

Définition 4 : Solution d'un système [Deschamps, p.1201] :

On appelle **solution du système** (S) toute p -liste $(x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}^p)$ vérifiant les n équations de (S) .

Définition 5 : Système compatible [Deschamps, p.1201] :

On dit que (S) est un **système compatible** lorsqu'il admet au moins une solution.

Remarque 6 : [Deschamps, p.1201]

Tout système homogène est compatible car admet au moins la solution $(0, 0, \dots, 0)$.

Définition 7 : Rang d'un système [Deschamps, p.1202] :

On appelle **rang de** (S) le rang de la matrice A du système (S) .

I.2 Divers interprétations

I.2.1 Interprétation matricielle

Si A est la matrice de (S) , alors en posant $X = (x_1, \dots, x_p)^\top$ et $B = (b_1, \dots, b_n)^\top$, le système (S) s'écrit $AX = B$.

Réciproquement, si l'on se donne $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, la recherche d'une matrice $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $AX = B$ se traduit par un système linéaire.

Remarque 8 : [Deschamps, p.1202]

Avec cette interprétation, on voit que si la matrice A est inversible (et donc carrée), alors le système (S) possède une solution unique qui est donnée par $X = A^{-1}B$.

I.2.2 Interprétation vectorielle

Si C_1, \dots, C_p désignent les vecteurs colonnes de la matrice A et si B désigne le vecteur $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$, alors le système peut s'écrire : $\sum_{j=1}^p x_j C_j = B$.

Réciproquement, si v_1, \dots, v_p et b sont $p+1$ vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n , la recherche de p scalaires x_1, \dots, x_p tels que $\sum_{j=1}^p x_j v_j = b$ peut se traduire, dans une base e , par un système linéaire de n équations à p inconnues.

Remarque 9 : [Deschamps, p.1203]

Avec cette interprétation, il est évident que :

- * Le système (S) est compatible si, et seulement si, B appartient au sous-espace vectoriel $\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ de \mathbb{K}^n .
- * Le rang de (S) est égal au rang de (C_1, \dots, C_p) .
- * Si la famille (C_1, \dots, C_p) est libre, alors le système possède au plus une solution.
- * Si la famille (C_1, \dots, C_p) engendre \mathbb{K}^p , alors le système est compatible.
- * Si $n = p$ et si la famille (C_1, \dots, C_n) est une base de \mathbb{K}^n , alors pour tout B le système possède une unique solution, correspondant aux composantes de B dans la base (C_1, \dots, C_n) .

I.2.3 D'autres interprétations

Il est possible d'interpréter un système linéaire à l'aide d'une application linéaire u et les propriétés d'un système peut se traduire par des propriétés sur u (injectivité, surjectivité, bijectivité, etc.).

Il est également possible d'interpréter un système linéaire à l'aide de formes linéaires et l'ensemble des solutions peut alors se voir comme l'intersection d'hyperplans.

I.3 Résolution d'un système linéaire

I.3.1 Système de Cramer

Proposition 10 : [Deschamps, p.1205]

Si (S) est un système linéaire de n équations à p inconnues, il est équivalent de dire :

- * Le système (S) admet une unique solution.
- * Le système (S_0) ne possède que la solution triviale.
- * La matrice du système est inversible.

On appelle alors **système de Cramer** tout système linéaire de n équations à n inconnues vérifiant l'une des propriétés précédentes.

Proposition 11 : Formules de Cramer [Gourdon, p.144] :

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $X, B \in \mathbb{K}^n$.

Le système $(S) : AX = B$ admet une unique solution si, et seulement si, on a $\det(A) \neq 0$. Et dans ce cas, en notant (A_1, \dots, A_n) les colonnes de A et \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{K}^n on a : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i = \frac{\det_{\mathcal{B}}(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)}{\det_{\mathcal{B}}(A)}$.

Exemple 12 :

Le système :

$$(S) : \begin{cases} 2x & -5y & +2z = 7 \\ x & +2y & -4z = 3 \\ 3x & -4y & -6z = 5 \end{cases}$$

admet $(5, 1, 1)$ pour unique solution.

I.3.2 Système quelconque

On suppose ici que (S) est de rang $r \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et quitte à échanger l'ordre des équations et la numérotation des inconnues, on suppose que le mineur principal de taille r de la matrice A est non nul.

Définition 13 : Équations principales [Gourdon, p.144] :

On appelle **équations principales de (S)** les r premières lignes du système (S) .

Définition 14 : Inconnues principales [Gourdon, p.144] :

Les inconnues apparaissant dans les équations principales sont appelées **inconnues principales**, tandis que les autres variables sont appelées **variables libres**.

Théorème 15 : Théorème de Rouché-Fontené [Gourdon, p.144] :

Le système (S) admet des solutions si, et seulement si, $p = r$ ou les $p - r$ mineurs principaux sont non nuls. Le système est alors équivalent au système des équations principales, les inconnues principales étant déterminées par un système de Cramer à l'aide des inconnues non principales.

Exemple 16 : [Gourdon, p.144]

Le système :

$$(S) : \begin{cases} x & +2y & -z & +t & = & 1 \\ x & & -z & -t & = & 1 \\ -x & +y & +z & +2t & = & m \end{cases}, m \in \mathbb{R}$$

admet des solutions si, et seulement si, $m = -1$. Et dans ce cas, le systèmes (S)

est équivalent au système $\begin{cases} x = 1 + z + t \\ y = -t \end{cases}$.

I.4 Structure de l'espace des solutions

Dans toute cette sous partie, on note \mathcal{S} l'ensemble des solutions de (S) .

I.4.1 Systèmes homogènes

Théorème 17 :

Il existe $(\varphi_i)_{i \in [1;p]}$ des formes linéaires sur \mathbb{K}^n telles que $\mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\varphi_i)$.

En notant r le rang de $(\varphi_i)_{i \in [1;p]}$, \mathcal{S} est donc un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n de dimension $n - r$.

Exemple 18 :

Les formes linéaires $\varphi_1 : (x, y, z) \mapsto x - y$ et $\varphi_2 : (x, y, z) \mapsto x + z$ sont linéairement indépendantes et l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

est $\mathcal{S} = \{(\lambda, \lambda, -\lambda), \lambda \in \mathbb{K}\}$ et il est de dimension 1.

Proposition 19 : [Deschamps, p.1109]

Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - r$, alors il existe r hyperplans H_1, \dots, H_r tels que $F = \bigcap_{i=1}^r H_i$.

En particulier, F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Exemple 20 :

En posant les vecteurs $v_1 = (1 \ 3 \ -2 \ 2 \ 3)$, $v_2 = (1 \ 4 \ -3 \ 4 \ 2)$ et $v_3 = (2 \ 3 \ -1 \ -2 \ 9)$, alors le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ est l'ensemble des solutions du système :

$$(S) : \begin{cases} -x & +y & +z & & = & 0 \\ 4x & -2y & & +t & = & 0 \\ -6x & +y & & & +s & = & 0 \end{cases}$$

I.4.2 Systèmes quelconques

Théorème 21 :

Si l'on a $(S) : AX = B$, alors \mathcal{S} est vide ou un espace affine de direction \mathcal{S}_{S_0} .

Exemple 22 :

L'ensemble des solutions du système :

$$(S) : \begin{cases} x & -3y & +7z & = & -4 \\ x & +2y & -3z & = & 6 \\ 7x & +4y & -z & = & 22 \end{cases}$$

est $(2 \ 2 \ 2) + \text{Vect}((-1 \ 2 \ 1))$.

II Opérations élémentaires et pivot de Gauss

II.1 Opérations élémentaires

Définition 23 : Opération élémentaire [Deschamps, p.1196] :

On appelle **opération élémentaire sur les lignes** (resp. les colonnes) d'une matrice l'une des trois opérations suivantes :

- * Addition d'un multiple d'une ligne (resp. d'une colonne) à une autre ligne (resp. une autre colonne).
- * Multiplication d'une ligne (resp. d'une colonne) par un scalaire non nul.
- * Échange de deux lignes (resp. échange de deux colonnes).

Remarque 24 : [Deschamps, p.1196]

On donne en annexe le codage que l'on utilisera.

Proposition 25 : [Deschamps, p.1197]

Deux matrices déduites l'une de l'autre par une opération élémentaire ont le même rang.

Proposition 26 : [Deschamps, p.1197]

- * Si une matrice A' se déduit d'une matrice A par opérations élémentaires sur les colonnes, alors les matrices A et A' ont la même image.
- * Si une matrice A' se déduit d'une matrice A par opérations élémentaires sur les lignes, alors les matrices A et A' ont le même noyau.

Remarque 27 : [Rombaldi, p.184 + 191 + 192]

Ces deux derniers résultats peuvent se traduire en termes d'orbites pour l'action de translation à gauche ou à droite (cf. II.2).

Définition 28 : Matrice de transvection [Rombaldi, p.147] :

On appelle **matrice de transvection** toute matrice qui peut se mettre sous la forme $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ dans une certaine base avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ distincts.

Définition 29 : Matrice de dilatation [Rombaldi, p.147] :

On appelle **matrice de dilatation** toute matrice qui peut se mettre sous la forme $D_{i,j}(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ dans une certaine base avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Définition 30 : Matrice de permutation [Rombaldi, p.189] :

On appelle **matrice de permutation** toute matrice qui peut se mettre sous la forme $P_{i,j} = I_n - (E_{i,i} + E_{j,j}) + (E_{i,j} + E_{j,i})$ avec $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Proposition 31 : Lien matrices-opérations élémentaires :

Opérations	$D_i(\alpha)A$	$T_{i,j}(\lambda)A$	$P_{i,j}A$
Conséquences sur les lignes	$L_i \leftarrow \alpha L_i$	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$

II.2 Pivot de Gauss

Définition 32 : Action de translation à gauche [Rombaldi, p.184] :

L'application $\Psi : \begin{cases} \text{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ (P, A) & \longmapsto PA \end{cases}$ définit une action de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ appelée **action par translation à gauche**.

Proposition 33 : [Rombaldi, p.184]

Deux matrices sont dans la même orbite pour l'action de translation à gauche si, et seulement si, elles ont le même noyau.

Définition 34 : Action de translation à droite [Rombaldi, p.184] :

L'application $\Psi : \begin{cases} \text{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ (P, A) & \longmapsto AP^{-1} \end{cases}$ définit une action de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ appelée **action par translation à droite**.

Proposition 35 : [Rombaldi, p.184]

Deux matrices sont dans la même orbite pour l'action de translation à droite si, et seulement si, elles ont la même image.

Remarque 36 : [Rombaldi, p.185]

Le noyau et l'image sont respectivement des invariants totaux pour l'action de translation à gauche/à droite.

Théorème 37 : [Rombaldi, p.191]

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

Il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ produit de matrices de permutation et de transvection telle que la matrice PA soit échelonnée en ligne. Cette matrice PA est donc dans l'orbite de A pour l'action de translation à gauche

Théorème 38 : [Rombaldi, p.192]

Une opération élémentaire sur les lignes d'un système linéaire $AX = b$ le transforme en un système équivalent.

Remarque 39 :

C'est ces deux derniers théorèmes qui justifient que la méthode du pivot de Gauss fonctionne bien pour toute matrice A .

Développement 1 : [A] [cf. ROMBALDI]

Théorème 40 : [Rombaldi, p.688]

Toute matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ s'écrit $A = \prod_{k=1}^r P_k D_n(\lambda) \prod_{j=1}^s Q_j$, où les P_k et Q_j sont des matrices de transvections et $\lambda = \det(A)$.

Exemple 41 :

On a $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = T_{1,2}(-\frac{1}{2})T_{2,1}(1)T_{2,1}(1)T_{1,2}(1)$.

Développement 2 : [B] [cf. ROMBALDI]

Corollaire 42 : [Rombaldi, p.689]

Les groupes $\text{SL}_n(\mathbb{R})$, $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ et $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

Corollaire 43 : [Rombaldi, p.689]

Le groupe $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe et ses deux composantes connexes sont $\text{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\text{GL}_n^-(\mathbb{R})$.

II.3 Décomposition LU et de Cholesky

Définition 44 : Déterminants principaux [Rombaldi, p.690] :

On appelle **déterminants principaux de A** les déterminants des matrices principales $A_k = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq k}$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Développement 3 : [A] [cf. ROMBALDI]

Théorème 45 : Décomposition LU [Rombaldi, p.690] :

Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors A admet une décomposition $A = LU$ où L est triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure si, et seulement si, tous les déterminants principaux de A sont non nuls.

De plus, cette décomposition est unique lorsqu'elle existe.

Remarque 46 :

Cette décomposition est surtout utilisée pour résoudre les systèmes linéaire du type $AX = b$ en résolvant à la place les systèmes triangulaires $Ux = y$ et $Ly = b$.

Exemple 47 :

La décomposition LU de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ est $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Développement 4 : [B] [cf. ROMBALDI]

Théorème 48 : Décomposition de Cholesky [Rombaldi, p.691] :

Si A est une matrice symétrique réelle définie positive, alors il existe une unique matrice réelle B triangulaire inférieure telle que tous ses éléments diagonaux soient positifs et vérifient $A = BB^T$.

Remarque 49 :

La décomposition de Cholesky est surtout utilisée dans la résolution de systèmes linéaires du type $Ax = b$ avec A une matrice réelle symétrique définie positive ou bien pour simuler un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_n(m, \Gamma)$ avec $\Gamma = A^T A$ à partir d'un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_n(0, I_n)$.

Théorème 50 : Décomposition QR [Rombaldi, p.692]

Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme $A = QR$ avec Q une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

Théorème 51 : Décomposition d'Iwasawa [Rombaldi, p.692] :

Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme $A = QDR$ avec Q une matrice orthogonale, D une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs et R une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux à 1.

III Méthodes itératives

Dans toute cette partie, on considère $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

III.1 Principe

Ces méthodes permettent de résoudre de manière approchée des systèmes d'équations linéaires du type $Ax = b$ lorsque les matrices sont assez grosses.

Définition 52 : Splitting [Allaire, p.428] :

On appelle **splitting de A** la décomposition $A = M - N$ avec M inversible.

Remarque 53 : [Allaire, p.428]

Le but de ces méthodes est d'approcher x et pour cela on considère $x_0 \in \mathbb{R}^n$ donné et $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b$.

En cas de convergence vers x , on s'arrête en pratique lorsque la norme $\|Ax_k - b\|$ est assez petite.

Définition 54 : Méthode itérative convergente [Allaire, p.428] :

On dit qu'une méthode itérative est une **méthode convergente** lorsque pour tout vecteur initial x_0 , la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la solution de (S) .

Proposition 55 : [Allaire, p.428]

La méthode de la remarque précédente converge si, et seulement si, $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Proposition 56 : [Allaire, p.428]

Si A est une matrice symétrique réelle définie positive et que (M, N) est son splitting, alors $M^T + N$ est symétrique.

Si de plus $M^T + N$ est définie positive, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$.

III.2 Exemples de méthodes itératives

Voici quelques méthodes itératives classiques :

Méthodes	Splitting
Jacobi	$M = \text{Diag}(a_{i,i})$ et $N = M - A$
Gauss-Seidel	$A = D - E - F$, $M = D - E$ et $N = F$
Relaxation ($\omega \in]0; 2[$)	$M = \frac{1}{\omega}D - E$ et $N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$

IV Annexe

IV.1 Codage opérations élémentaires

Addition de λL_j à la ligne L_i	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
Multiplication de la ligne L_i par $\lambda \neq 0$	$L_i \leftarrow \lambda L_i$
Échange des lignes L_i et L_j	$L_i \leftrightarrow L_j$

IV.2 Implémentation de l'algorithme du pivot de Gauss

```
import numpy as np

def echange (A,i,j) :
    tampon = A[i].copy()
    A[i] = A[j]
    A[j] = tampon

def recherche_pivot_naif(A,j) :
    i = j
    while A[i,j] == 0 :
        i = i + 1
    return i

def elimination(A,b,j) :
    i = recherche_pivot_naif(A,j)
    echange(A,i,j)
    echange(b,i,j)
    for k in range(j + 1,A.shape[0]) :
        b[k] = b[k] - (A[k,j]/A[j,j]) * b[j]
        A[k] = A[k] - (A[k,j]/A[j,j]) * A[j]

def descente(A,b) :
    for j in range(A.shape[1]-1) :
        elimination(A,b,j)

def remonte(A,b) :
    n = A.shape[0]
    X = np.zeros(n)
    for k in range(n - 1, - 1, -1) :
        somme = 0
        for l in range(k + 1,n) :
            somme = somme + A[k,l] * X[l]
        X[k] = (b[k] - somme)/A[k,k]
    return X
```

```
def resolution(A,b) :
    A_copie = A.copy()
    B_copie = B.copy()
    descente(A_copie,B_copie)
    return remonte(A_copie,B_copie)
```

IV.3 Exemple d'utilisation de l'algorithme du pivot de Gauss

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \\ 7x + y + 4z = 5 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + 2y - z = 1 \\ 7x + y + 4z = 5 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 4y - 5z = -1 \\ 7x + y + 4z = 5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1} \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 4y - 5z = -1 \\ 8y - 10z = -2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 4y - 5z = -1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x - y = 1 - 2z \\ 4y = -1 + 5z \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}z \\ y = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}z \end{cases}$$

Ainsi, on a $\mathcal{S} = \{(3 - 3z, -1 + 5z, 4z), z \in \mathbb{R}\}$.

Remarques sur la leçon

- On peut également parler dans cette leçon de minimisation de fonctionnelle, de régression linéaire ou encore de la méthode des moindres carrés.

Liste des développements possibles

- Générateurs de $SL_n(\mathbb{K})$ et $GL_n(\mathbb{K})$.
- Décomposition LU et décomposition de Cholesky.

Bibliographie

- Claude Deschamps, *Tout-en-un MPSI*.
- Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre et Probabilités*.
- Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Géométrie*.
- Grégoire Allaire, *Analyse numérique et optimisation*.